Soluție

1. a) $rang\left(A_0\right)=1$.

b) Se verifică prin calcul.

c) Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$,

$$C_n \overset{not}{=} A^nB-BA^n = A^{n-1}\left(AB-BA\right)+\left(A^{n-1}B-BA^{n-1}\right)A \overset{ip}{=} A^{n-1}\cdot A+C_{n-1}\cdot A.$$

Folosind relația anterioară, se demonstrează prin inducție concluzia.

2. a) Avem $f(-1)=f(1)=0$ și obținem $a=-4$ și $b=12$.

b) Deoarece ecuația are coeficienți reali, dacă admite rădăcina $x_1=i$, va avea și rădăcina $\overline{x_2}=-i$, deci polinomul f se va divide cu $\left(X-i\right)\left(X+i\right)=X^2+1$, adică $a=4$ și $b=-12$.

c) Rădăcinile x_1,x_2,x_3 sunt în progresie aritmetică, deci există $z,r\in\mathbb{C}$ astfel încât $x_1=z-r$, $x_2=z$ și $x_3=z+r$. Obținem $x_1+x_2+x_3=3z=3$, deci $z=1$.

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(1-r\right)^2+1+\left(1+r\right)^2=11$, deci $r\in\left\{-2,2\right\}$, iar rădăcinile sunt $-1,1,3$.

În final, $a=4\cdot\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=-4$ și $b=-4x_1x_2x_3=12$.